Université de Lorraine, UFR MIM
Master de Mathématiques, M2-MFA, 2014-2015
Equations de la mécanique des fluides

Feuille 4

1- Schéma décentré de Courant pour $u_t + u_x = 0$
1) Donner la solution exacte du problème de Cauchy

$$(P1)\begin{cases} u_t + u_x = 0 & x \in [0,1] \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [0,1] \end{cases} \tag{1}$$

2) Exécuter le programme `upw1.m`. On prendra successivement pour nombre de mailles $N = 50, 100, 200, 400, ...$ On observe la solution exacte (pointillés) et l'approximation (trait continu) du problème (1) par le schéma de Courant (ou "upwind", ou "décentré")

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \tag{2}$$

u_j^n est une approximation de $u(jh, nk)$. La condition initiale est $u_j^0 = u_0(jh)$. Qu'oberve-t-on quand le nombre de mailles augmente?

3) Modifier la condition initiale dans le script `initial.m`.

4) Remplacer dans le programme `dt=0.8*h;` par `dt=0.3*h;`. Faire des essais avec $N = 50, 100, 200, 400, ...$ On observe la **dissipation** du schéma.

5) Remplacer dans le programme `dt=0.8*h;` par `dt=h;`. Exécuter. Qu'observe-t-on?

6) Remplacer dans le programme `dt=0.8*h;` par `dt=Ch;`, avec $C = 1.1$,$C = 1.01$, $C = 1.001$. Qu'observe-t-on?

2- Schéma décentré de Courant pour l'équation $u_t + a(x,t)u_x = 0$
Dans le cas d'une vitesse positive $a(x,t) > 0$, le schéma de Courant s'écrit

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + a_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \tag{3}$$

où $a_j^n = a(jh, nk)$.

1) Modifier le programme `upw.m` (qui devient `upw2.m`) pour qu'il puisse discrétiser les problèmes suivants:

$$(P2)\begin{cases} u_t + xu_x = 0 & x \in [0,1] \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [0,1] \end{cases} \tag{4}$$

et

$$(P3)\begin{cases} u_t + tu_x = 0 & x \in [0,1] \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in [0,1] \end{cases} \tag{5}$$

Modifier également le calcul de la solution exacte.

2) Vérifier numériquement que, pour que le schéma soit stable, le pas de temps k doit être choisi t.q. $k = C\frac{h}{\max_j |a_j^n|}$, où $C \in [0,1]$ est une constante (nombre de *Courant*).

3) On considère la fonction $u(x,t) = x(1+x) - t$, $x \in [0,1]$, $\quad t \geq 1$. Calculer la vitesse $a(x,t)$ telle que u soit solution de l'équation de transport à vitesse a, (problème (P4)). Pourquoi peut-on utiliser le programme précédent pour discrétiser le problème de Cauchy correspondant?

4) Comparer numériquement la solution exacte et la solution approchée par le schéma de Courant. Essayer plusieurs maillages (N=50, 100, 200, ...).

3- Schéma décentré pour $u_t + f(u)_x = 0$

1) Un schéma conservatif volumes finis pour la loi de conservation

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{6}$$

est un schéma de la forme

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + \frac{f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n}{h} = 0 \tag{7}$$

où u_j^n est une approximation de la valeur moyenne $\frac{1}{h}\int_{[x_{j-1/2},x_{j+1/2}]} u(x,t^n)dx$. On appelle $f_{j+1/2}^n = \Phi(u_j^n, u_{j+1}^n)$, le ***flux numérique*** à l'interface $j+1/2$. On note $a(u) = f'(u)$ et $c(u,v) = \frac{f(u)-f(v)}{u-v}$. On note aussi $c_{j+1/2}^n = c(u_j^n, u_{j+1}^n)$. La généralisation du schéma décentré de Courant à (6) est donnée par le schéma (7) avec

- si $c_{j+1/2}^n > 0$, $\Phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_j^n)$
- si $c_{j+1/2}^n < 0$, $\Phi(u_j^n, u_{j+1}^n) = f(u_{j+1}^n)$

Montrer que le flux numérique $\Phi(u,v)$ s'écrit sous la forme

$$\Phi(u,v) = \frac{1}{2}(f(u) + f(v)) - \frac{1}{2}|c(u,v)|(v-u) \tag{8}$$

2) Ecrire un programme `upw3.m` pour (7). On assemblera le schéma en deux étapes:
a) calcul du flux numérique aux interfaces.
b) assemblage du schéma par la formule (7)
3) Tester le programme sur les problèmes suivants:

$$\left\{ \begin{array}{c} u_t + \left(\dfrac{u^2}{2}\right)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{array} \right. \tag{9}$$

avec la condition initiale $u_0(x)$ donnée successivement par:
- $u_0(x) = 1$ si $x < 1/2$ et $u_0(x) = 0$ si $x > 1/2$ (solution choc)
- $u_0(x) = 0$ si $x < 1/2$ et $u_0(x) = 1$ si $x > 1/2$ (solution détente)
- $u_0(x)$ donnée par:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0 \quad \text{pour } x < 0.205 \\ &= 1 \quad \text{pour } 0.205 < x < 0.5 \\ &= (0.79 - x)/0.29 \quad \text{pour } 0.5 < x < 0.79 \\ &= 0 \quad \text{pour } 0.79 < x < 1 \end{aligned}$$

Donner la solution analytique du problème dans chacun des trois cas. Qu'observe-t-on dans le cas 2 ? Quelle est la solution faible calculée par le schéma ? Afin de corriger le schéma, on effectue une modification de la fonction flux numérique. Une possibilité est de remplacer $|c_{j+1/2}|$ dans (7) par la correction de Harten et Hyman

$$|\bar{c}_{j+1/2}| = \left\{ \begin{array}{l} |c_{j+1/2}| \quad \text{si } |c_{j+1/2}| \geq \epsilon \\ \frac{1}{2}(\frac{c_{j+1/2}^2}{\varepsilon} + \varepsilon) \text{ si } |c_{j+1/2}| < \varepsilon \end{array} \right. \tag{10}$$

avec $\varepsilon = \max(0, a_{j+1} - c_{j+1/2}, c_{j+1/2} - a_j)$. (On pourra essayer d'autres valeurs de ε.)
4) Pour chacun des 3 cas test précédents, calculer $E_h(T) = \|u_h(.,T) - u_{ex}(.,T)\|_{L^2}$ avec $T = 1$, et u_h la fonction valant u_j sur la $]x_{j-1/2}, x_{j+1/2}[$. On tracera la courbe $\mathrm{Log}_{10}(h) \mapsto \mathrm{Log}_{10}(E_h(T))$ en se basant sur les 4 valeurs obtenues pour $h = 1/50, 1/100, 1/200, 1/400$.

4- Equation de conservation du trafic routier
On considère le problème suivant qui modélise le trafic routier sur une autoroute. L'axe des x représente l'autoroute. On suppose que le flux automobile s'écoule dans le sens des $x > 0$. On note $\rho(x,t)$ la densité du trafic (nombre de voitures par unité de longueur) et $q(x,t)$ le flux du trafic (nombre de voitures par unité de temps). L'équation de conservation de la densité en $\rho(x,t)$ est

$$\begin{cases} \rho_t + q_x = 0 \\ \rho(x,0) = \rho_0(x) \end{cases} \tag{11}$$

On modélise ensuite le flux en fonction de ρ (“loi d'état” ou “relation de fermeture”) par

$$q = G(\rho) = c\rho(1 - \frac{\rho}{\rho_1}). \tag{12}$$

c est la vitesse moyenne du trafic routier libre (vitesse limite de l'autoroute) et ρ_1 est la densité maximum de véhicules admise par l'autoroute, (ce qui correspond à un embouteillage à l'arrêt).
1) On pose $u = \rho/\rho_1$. Calculer la fonction flux $f(u)$ telle que (11) s'écrive

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases} \tag{13}$$

2) On suppose que u_0 est C^1 et décroissante. Donner l'équation implicite dont $u(x,t)$ est solution.
3) On considère la condition initiale (P4)

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 3/4 \quad x \le 0 \\ &= 3/4 - (5/12)x \quad 0 \le x \le 1 \\ &= 1/3 \quad x \ge 1 \end{aligned}$$

Calculer explicitement la solution exacte correspondante a (13). Préciser la nature physique du problème correspondant.
4) On suppose maintenant que u_0 est strictement croissante sur $]\xi_1, \xi_2[$. Calculer le temps T^*au delà duquel la solution ne peut plus être C^1.
5) On considère la donnée initiale (P5)

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 1/3 \quad x \le 0 \\ &= 1/3 + (5/12)x \quad 0 \le x \le 1 \\ &= 3/4 \quad x \ge 1 \end{aligned}$$

Calculer T^*. Calculer explicitement la solution exacte de ce problème, en distinguant $t < T^*$ et $t > T^*$. Quel est l'interprétation physique de ce problème ?
6) Résoudre numériqument ce problème par l'un des schémas suivants: décentré, Lax-Friedrichs, MacCormack. On fera des essais avec différents maillages.
NB: On prendra dans les calculs numériques $c = 1$.

5- Méthode MUSCL (Van Leer) $u_t + f(u)_x = 0$
La méthode MUSCL (pour *monotonic upwind scheme for conservation laws*) de

Van Leer est une méthode d'interpolation générique permettant d'augmenter la précision tout en empêchant l'apparition d'oscillations parasites. On part d'un schéma conservatif de base de la forme

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{k}+\frac{f_{j+1/2}^n-f_{j-1/2}^n}{h}=0 \tag{14}$$

avec au temps $t^n=nk$

$$f_{j+1/2}^n=\Phi(u_j^n,u_{j+1}^n) \tag{15}$$

où $\Phi(u,v)$ est une formule de flux numérique donnée. On considèrera ici le cas où $\Phi(u,v)$ est le flux du schéma décentré avec la correction de Harten et Hyman. On remplace (15) par

$$f_{j+1/2}^n=\Phi(u_{j+1/2}^{n,-},u_{j+1/2}^{n,+}) \tag{16}$$

où $u_{j+1/2}^-$, $u_{j+1/2}^+$ sont des interpolations affines de u au temps t^n provenant des mailles j, $j+1$. En notant $\Delta_{j+1/2}=u_{j+1}-u_j$ et $r_j=\frac{u_j-u_{j-1}}{u_{j+1}-u_j}$, ces interpolations sont de la forme

$$u_{j+1/2}^-=u_j+\frac{1}{2}\Delta_{j+1/2}\varphi(r_j) \tag{17}$$

$$u_{j+1/2}^+=u_{j+1}-\frac{1}{2}\Delta_{j+1/2}\varphi(1/r_{j+1}) \tag{18}$$

La fonction $\varphi(r)$ s'appelle le *limiteur de pente*. Elle est destinée à empêcher l'apparition d'oscillations. Plus précisément, on a

$$u_{j+1/2}^{\pm}\in[min(u_j,u_{j+1}),max(u_j,u_{j+1}] \tag{19}$$

si et seulement si
(i) $\varphi(r)\leq 0$ pour $r\leq 0$
(ii) $\varphi(r)\in[0,2r]$ pour $r\in[0,1]$
(iii) $\varphi(r)\leq 2$ pour $r\geq 1$
1) Ecrire un programme `muscl.m` correspondant au schéma (14), (16). On utilisera le limiteur min-mod défini par
• $\varphi(r)=0$ pour $r\leq 0$
• $\varphi(r)=r$ pour $r\in[0,1]$
• $\varphi(r)=1$ pour $r\geq 1$
2) Tester le schéma MUSCL sur les cas de l'exercice 1.
3) Calculer numériquement que la *variation totale* de u_j^n, définie au temps nk par

$$TV^n=\sum_j|u_j^n-u_{j-1}^n| \tag{20}$$

Tracer la fonction $n\mapsto TV^n$.

6- Quelques cas-test du type $u_t+f(u)_x=0$
On considère les problèmes suivants

$$(P6)\left\{\begin{array}{ll} u_t+(u^2/2)_x=0 & x\in[0,1]\quad t\geq 0\\ u(x,0)=1 & \text{si } 0<x<1/2\quad u(x,0)=-1 \text{ si } 1/2<x<1\end{array}\right. \tag{21}$$

$$(P7)\begin{cases} u_t + (u^2/2)_x = 0 & x \in [0,1] \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = -1 & \text{si } 0 < x < 1/2 \quad u(x,0) = 1 \text{ si } 1/2 < x < 1 \end{cases} \tag{22}$$

$$(P8)\begin{cases} u_t + (u-u^2)_x = 0 & x \in]-1;2[\quad t \geq 0 \\ u(x,0) = 0 & \text{si } -1 < x < 0 \quad u(x,0) = x^2 \text{ si } 0 < x < 1 \quad u(x,0) = 1 \text{ si } 1 < x < 2 \end{cases} \tag{23}$$

Il s'agit du problème du trafic routier (13) avec une autre condition initiale.

$$(P9)\begin{cases} u_t + (u^3/3)_x = 0 & x \in]-3;3[\quad t \geq 0 \\ u(x,0) = x & \text{si } -3 < x < 3 \end{cases} \tag{24}$$

Pour chacun de ces cas,
1) Calculer les caractéristiques issues de $\xi \in \mathbb{R}$. Les essiner les à l'aide de `matlab` pour plusieurs valeurs de ξ. Observer en particulier les lieux où elles se coupent et en déduire (heuristiquement) si des chocs sont susceptibles d'apparaître.
2) Calculer la solution faible admissible (entropique) $u(x,t)$. Ecrire un programme qui représente cette solution.
3) Résoudre numériquement par les schémas décentrés, Lax-Wendroff, Lax-Friedrichs, Mac-Cormack, Muscl.
4) Représenter sur un même graphique la solution numérique à des instants différents.
5) Représenter sur un même graphique la solution au même instant mais sur des maillages différents. (On pourra prendre 50, 100, 200, 400, 800 mailles).
6) Tracer la courbe $\mathrm{Log}(h) \mapsto \mathrm{Log}(E_h(t))$, (cf exercice 2).
7) Question libre. Voici des thèmes possibles:
- autre loi de conservation. exemple: $f(u) = u^2(1-u^2)$.
- test numérique pour savoir si les solutions calculées numériquement sont entropiques ou non.
- terme source dans l'équation de Burger
- application des schémas précédents pour le p-système de la dynamique des gaz.